MINISTÈRE DE L'EQUIPEMENT, DU LOGEMENT, DES TRANSPORTS ET DE LA MER

COMPOSITION COMMUNE DE MATHEMATIQUES

Temps accordé : 4 heures

E.I.T.P.E. 1991

Première partie: L'intégrale λ_n. Les fonctions Λ et L.

1.a. Quel est l'ensemble E des nombres x réels tels que $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ existe. Pour $x \in E$, simplifier $S(x)$.

b. Simplifier, pour $x \in E$, l'expression de $R_n(x) = S(x) - \sum_{k=0}^{n} x^{2k}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ (entier naturel), on pose $\lambda_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta\, d\theta$. Calculer λ_n au moyen de factorielles.

3.a. Pour $t \in E$, calculer $\Lambda(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t\cos\theta)\, d\theta$.

b. Montrer que Λ ainsi définie admet un développement en série entière que l'on précisera, ainsi que son rayon de convergence.

4. Pour $t \in E$, prouver l'existence de $L(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Lambda(t\cos\theta)\, d\theta$ et montrer que L ainsi définie admet un développement en série entière que l'on précisera ainsi que son rayon de convergence.

Deuxième partie: Etude de $\Delta(\alpha, \beta)$.

On donne deux réels α et β vérifiant $0 < \alpha \leq \beta$ et on pose

$$\Delta(\alpha,\beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta + \beta^2\sin^2\theta}}$$

1. Ranger dans l'ordre croissant (au sens large) les réels $\Delta(\alpha,\beta)$, $\Delta(\alpha,\alpha)$, $\Delta(\beta,\beta)$ et en déduire un encadrement simple de $\Delta(\alpha,\beta)$.

2. On pose (provisoirement) $\omega = \text{Arctan}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ (on a $0 < \omega \leq \frac{\pi}{4}$). Transformer $\int_\omega^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta + \beta^2\sin^2\theta}}$ (qui

3. Trouver en fonction de <u>α et β exclusivement</u> deux réels a et b strictement positifs tels que $M(\alpha,\beta) = \frac{b}{L(a)}$.

4. Soit λ un réel strictement positif. Trouver une relation entre $M(\alpha,\beta)$ et $M(\lambda\alpha,\lambda\beta)$.
En déduire que le calcul de $M(\alpha,\beta)$ peut se ramener au calcul de $M(x,1)$ pour une valeur appropriée de x.

Cinquième partie: La fonction Ω

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ (réel strictement positif), on désigne par $\Omega(x)$ la moyenne arithmético-géométrique des nombres 1 et x.

1. Ainsi Ω est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Le vérifier.

2.a. Quel est l'ensemble $F = \{y \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \sqrt{y} \in E\}$, E étant défini au **1.** de la première partie ?

b. Pour $y \in F$, on pose $\ell(y) = L(\sqrt{y})$. Démontrer que ℓ ainsi définie est indéfiniment dérivable sur F.

A SUIVRE

3. Dans cette question $x \in]1,+\infty[$.
a. Transformer $\Omega(x)$ en utilisant la fonction ℓ. En déduire l'existence et une expression de $\Omega'(x)$.
b. Démontrer que $\Omega'(x)$ tend vers une limite que l'on calculera lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

4. Dans cette question $x \in]0,1[$
a. Transformer encore $\Omega(x)$ en utilisant la fonction ℓ. En déduire l'existence et une expression de $\Omega'(x)$.
b. Démontrer que $\Omega'(x)$ tend vers une limite que l'on calculera lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

5. La fonction Ω est-elle continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Sixième partie: la série $\sum w_n$

1. On donne un réel x_0 appartenant à $]0,1[$.
a. Montrer qu'on peut définir une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de x_0, par la relation: $\forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} = \dfrac{2\sqrt{x_n}}{1+x_n}$. Etudier cette suite.
b. Montrer qu'on peut définir une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation: $\forall n \in \mathbb{N} : z_n = \sqrt{1-x_n^2}$. Etudier la série de terme général z_n (on écrira z_{n+1} en fonction de x_n) puis montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w_n$, où $w_n = \ln\left(\dfrac{2}{1+x_n}\right)$.

2.a. On considère la suite $(L(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Utiliser le résultat de la fin de la troisième partie pour calculer, en fonction de x_n, le rapport $\dfrac{L(z_n)}{L(z_{n+1})}$.
b. Montrer que la suite $(L(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, qu'on précisera, et en déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ en fonction de $\Omega(x_0)$.
c. A l'aide d'une calculatrice donner les valeurs des x_n pour $n = 1,2,3$ à 10^{-5} près à partir de $x_0 = 0,5$.
En déduire une valeur approchée de $M(3,6)$, que l'on comparera à celle trouvée à la quatrième partie, 1.c.

est égal à: $\Delta(\alpha,\beta) - \displaystyle\int_0^{\omega} \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta + \beta^2\sin^2\theta}}\Bigg)$ en prenant pour nouvelle variable $\psi = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\alpha}{\beta\tan\theta}\right)$.
En déduire une relation simple entre $\Delta(\alpha,\beta)$ et $\displaystyle\int_0^{\omega} \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta + \beta^2\sin^2\theta}}$.

3. Transformer $2\displaystyle\int_0^{\omega} \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta + \beta^2\sin^2\theta}}$ en adoptant cette fois la nouvelle variable d'intégration:
$\phi = 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}\cdot\tan\theta\right)$.

4.a. Transformer l'intégrale obtenue au terme de la question précédente de manière à lui donner la forme: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{a+b\cos^2\phi}}$ où a et b sont des constantes.
b. Démontrer l'existence de deux nombres réels α' et β' autres que α et β vérifiant les conditions $0 < \alpha' \leq \beta'$ et $\Delta(\alpha',\beta') = \Delta(\alpha,\beta)$.
Exprimer α' et β' en fonction de α et β.

Tournez la page S.V.P.

Troisième partie: Une propriété de la fonction L (définie à la première partie).

1. On considère deux réels α et β vérifiant $0 < \alpha \leq \beta$ et deux réels α' et β' autres que α et β, définis dans la deuxième partie et vérifiant $0 < \alpha' \leq \beta'$ et $\Delta(\alpha', \beta') = \Delta(\alpha, \beta)$. Calculer en fonction de α et β exclusivement les réels positifs qu'on notera: A, B, t, u, tels que $\Delta(\alpha, \beta) = AL(t)$ et $\Delta(\alpha', \beta') = BL(u)$. S'assurer que A et B sont positifs strictement .

2. Calculer, en fonction de t exclusivement le nombre u et le rapport $\dfrac{L(u)}{L(t)}$. Ecrire, en n'utilisant que le réel t, la relation obtenue.

Quatrième partie: Moyenne arithmético-géométrique.

On considère deux réels fixes α et β tels que $0 < \alpha \leq \beta$.

1.a. Montrer que l'on peut définir par récurrence deux suites: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \alpha$, $v_0 = \beta$ et $\forall k \in \mathbb{N}$

$$u_{k+1} = \sqrt{u_k v_k} \qquad v_{k+1} = \frac{u_k + v_k}{2}$$

b. Montrer que ces deux suites convergent vers une limite commune notée $M(\alpha, \beta)$ (qu'on appellera moyenne arithmético-géométrique de α et β).

c. Décrire un algorithme permettant de calculer $M(3,6)$ à 10^{-5} près. Donner une valeur k_0 entière telle que, pour $k \geq k_0$, u_k soit une valeur approchée de $M(3,6)$ à moins de 10^{-5} près et donner cette valeur approchée.

2. On considère l'intégrale $\Delta(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2\theta + \beta^2 \sin^2\theta}}$. (On pourra utiliser les résultats de la deuxième partie.)

a. Comparer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\Delta(u_k, v_k)$ et $\Delta(u_{k+1}, v_{k+1})$.

b. Comparer $\Delta(\alpha, \beta)$ et $\Delta(u_n, v_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Trouver un encadrement de $\Delta(u_n, v_n)$ puis de $\Delta(\alpha, \beta)$.

d. Trouver une relation simple entre $M(\alpha, \beta)$ et $\Delta(\alpha, \beta)$.

FIN